ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

calculator.gr

Βασική Ορολογία των Πράξεων

calculator.gr

- $\underbrace{\text{προσθετέος} + \text{προσθετέος}}_{\text{πρόσθεση}} = \text{άθροισμα}$
- $\underbrace{\text{μειωτέος} - \text{αφαιρετέος}}_{\text{αφαίρεση}} = \text{διαφορά} \begin{pmatrix}\text{του αφαιρετέου}\\ \text{από το μειωτέο}\end{pmatrix}$
- $\underbrace{\text{παράγοντας} \cdot \text{παράγοντας}}_{\text{πολλαπλασιασμός}} = \text{γινόμενο}$
- $\underbrace{\text{διαιρετέος} : \text{διαιρέτης}}_{\text{διαίρεση}} = \text{πηλίκο} \begin{pmatrix}\text{του διαιρετέου}\\ \text{δια του διαιρέτη}\end{pmatrix}$
- $\underbrace{\text{βάση}^{\text{εκθέτης}}}_{\text{δύναμη}}$

Αντίθετοι αριθμοί

calculator.gr

- Δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι όταν έχουν άθροισμα μηδέν (0).
  Δηλαδή α, β αντίθετοι όταν $\alpha + \beta = 0$.
- Ο αντίθετος του αριθμού x, συμβολίζεται $-x$.
  Άρα, αν $\alpha + \beta = 0$ τότε και αντίστροφα $\alpha = -\beta$.

Ιδιότητες πράξεων (αξιωματικές)

calculator.gr

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετο/Αντίστροφο Στοιχείο	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 \quad (\alpha \neq 0)$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Θετικοί αριθμοί - Αρνητικοί αριθμοί

calculator.gr

- Το σύμβολο συν $(+)$ ή πλην $(-)$ που γράφεται μπροστά από έναν αριθμό, όταν δεν δηλώνει πρόσθεση ή αφαίρεση αντιστοίχως, λέγεται πρόσημο του αριθμού.
- Θετικός αριθμός λέγεται αυτός που έχει πρόσημο συν $(+)$.
  Αρνητικός αριθμός λέγεται αυτός που έχει πρόσημο πλην $(-)$.
- Κάθε θετικός αριθμός θεωρείται μεγαλύτερος του μηδενός.
  Κάθε αρνητικός θεωρείται μικρότερος του μηδενός.
  Κάθε αρνητικός θεωρείται μικρότερος από κάθε θετικό.
- Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.
  Ετερόσημοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

- Πραγματική ευθεία ή πραγματικός άξονας λέγεται μια ευθεία στην οποία θεωρούμε ότι βρίσκονται όλοι οι αριθμοί, με τέτοιο τρόπο, ώστε κινούμενοι από αριστερά προς τα δεξιά η τιμή τους να αυξάνει.
- Αν μία παρένθεση έχει μπροστά της συν $(+)$ η τίποτε, μπορεί να απαλειφθεί και οι προσθετέοι που περιέχει θα βγουν με τα πρόσημα που έχουν.
- Αν μία παρένθεση έχει μπροστά της πλην $(-)$, μπορεί να απαλειφθεί και οι προσθετέοι που περιέχει θα βγουν με αλλαγμένα πρόσημα.

Απόλυτη τιμή

calculator.gr

- Ορίζουμε ως **απόλυτη τιμή** ενός αριθμού x και την συμβολίζουμε $|x|$, τον ίδιο τον αριθμό αν αυτός είναι θετικός ή μηδέν και τον αντίθετό του αν αυτός είναι αρνητικός. Δηλαδή

$$|x| \overset{\text{ορ}}{=} \begin{cases} x, & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Γεωμετρικά ερμηνεύεται ως η απόσταση του σημείου $M(x)$ από την αρχή $O(0)$ του πραγματικού άξονα.

Πράξεις με ρητούς αριθμούς

calculator.gr

- Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.
- Για να αφαιρέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ρητούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε πρόσημο
  - συν $(+)$ αν είναι ομόσημοι
  - πλην $(-)$ αν είναι ετρόσημοι
- Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε πρόσημο
  - συν $(+)$ αν είναι ομόσημοι
  - πλην $(-)$ αν είναι ετρόσημοι

Δύναμη αριθμού με εκθέτη φυσικό

calculator.gr

- **Η Δύναμη** με βάση $\alpha \in \mathbb{R}$ και εκθέτη $\nu \in \mathbb{N}$, συμβολίζεται α^ν και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \alpha^1 = \alpha \\ \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \quad (\nu > 1) \end{cases}$$

- **Ιδιότητες Δυνάμεων**

$$\boxed{\alpha^\nu \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}} \quad \boxed{\alpha^\nu \beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu} \quad \boxed{(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu\mu}} \quad \boxed{\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\nu-\mu}} \quad \boxed{\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$$

- **Παρατηρήσεις**

$\boxed{1^\nu = 1}$ $\boxed{\begin{array}{c} 0^\nu = 0 \\ (\nu \neq 0) \end{array}}$ $\boxed{10^\nu = 1\underbrace{0000\cdots 0}_{\nu \text{ μηδενικά}}}$ $\boxed{10^{-\nu} = 0.\underbrace{0000\cdots 01}_{\nu \text{ ψηφία}}}$ $\boxed{(-1)^\nu = \begin{cases} 1, & \nu \text{ άρτιος φυσικός} \\ -1, & \nu \text{ περιττός φυσικός} \end{cases}}$

Προτεραιότητα πράξεων στις αριθμητικές παραστάσεις

calculator.gr

- **Προτεραιότητα πράξεων**: Για τον υπολογισμό της τιμής μιας αριθμητικής παράστασης εκτελούμε τις πράξεις με την ακόλουθη σειρά:
  1. Πρώτα απ' όλα, τρέπουμε τους μεικτούς σε κλάσματα, κάνουμε τα σύνθετα κλάσματα απλά και απλοποιούμε τα κλάσματα.
  2. Αν δεν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε
     α΄) τις δυνάμεις
     β΄) τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά)
     γ΄) τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά).
  3. Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.
- **Επισήμανση**: Πολλαπλασιασμός και διαίρεση, πρόσθεση και αφαίρεση, καθώς και δύο ίδιες πράξεις (πχ δύο αφαιρέσεις), έχουν την ίδια προτεραιότητα και θα πρέπει να τις εκτελούμε από αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή εκτελούμε πρώτα, όποια βρούμε πρώτη.

Ευκλείδεια Διαίρεση - Τέλεια και ατελής διαίρεση

calculator.gr

- Ορισμός Ευκλείδειας Διαίρεσης: Αν δοθούν δυο φυσικοί αριθμοί Δ (Διαιρετέος) και δ (διαιρέτης) τότε υπάρχουν ακριβώς δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π (πηλίκο) και υ (υπόλοιπο) τέτοιοι ώστε: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < \delta$. Η σχέση αυτή λέγεται εξίσωση (ή ταυτότητα) της Ευκλείδειας Διαίρεσης και η διαδικασία εύρεσής της λέγεται Ευκλείδεια Διαίρεση.

$$\begin{array}{c|c} \Delta & \delta \\ \cline{2-2} \vdots & \pi \\ \upsilon & \end{array}$$

- Αν $\upsilon = 0$, η Διαίρεση λέγεται **τέλεια**.
  Αν $\upsilon \neq 0$, η Διαίρεση λέγεται **ατελής**.

Η ισότητα $\Delta = \delta \cdot \pi$

calculator.gr

Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες (όπου Δ, δ φυσικοί αριθμοί):

- Ο δ διαιρεί τον Δ
- Ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ
- Ο Δ διαιρείται από τον δ
- Ο δ είναι υποπολλαπλάσιο του Δ

και σημαίνουν ότι: υπάρχει φυσικός αριθμός π τέτοιος ώστε: $\Delta = \delta \cdot \pi$

Πρώτοι - Σύνθετοι - Σχετικά Πρώτοι

calculator.gr

- Ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 λέγεται **πρώτος** όταν έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και τη μονάδα.
- Ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 λέγεται **σύνθετος** όταν δεν είναι πρώτος.

- Οι αριθμοί 0 και 1 δεν θεωρούνται ούτε πρώτοι ούτε σύνθετοι.
  Οι μικρότεροι πρώτοι αριθμοί είναι $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ κτλ.
- Δύο φυσικοί αριθμοί λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** (ή **σχετικά πρώτοι**) όταν έχουν ΜΚΔ την μονάδα.

Κριτήρια Διαιρετότητας

calculator.gr

Τα Κριτήρια Διαιρετότητας είναι κανόνες με τους οποίους διακρίνουμε αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται με αριθμούς όπως 2, 3, 5, 9, 10, 4 και 25.

Ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται:

- με το 2, αν λήγει σε 0, 2, 4, 6 ή 8.
- με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5.
- με το 3, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.
  Επομένως, αν το μονοψήφιο άθροισμα των ψηφίων του είναι 3, 6 ή 9.
- με το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.
  Επομένως, αν το μονοψήφιο άθροισμα των ψηφίων του είναι 9.
- με το 10, 100, 1000,... αν λήγει σε 0, 00, 000,... αντιστοίχως.
- με το 25, αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 25 (δηλαδή αν λήγει σε 00, 25, 50 ή 75)
- *με το 4, αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4.*
- *με το 6, αν διαιρείται με το 2 και το 3 συγχρόνως (αφού 2,3 πρώτοι μεταξύ τους).*
  Αντίστοιχα κριτήρια προκύπτουν για τους 12, 15, 18.
- *με το 8, αν το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 8.*

Ιδιότητες της Διαιρετότητας

calculator.gr

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους φυσικούς αριθμούς, τότε διαιρεί το άθροισμά τους και τη διαφορά τους.
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο, τότε διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

Ανάλυση Αριθμού σε Γινόμενο Πρώτων Παραγόντων

calculator.gr

1. Γράφουμε τον αριθμό. Ακολουθεί μία κάθετη γραμμή. Στην ίδια γραμμή αλλά δεξιά της κάθετης, γράφουμε τον μικρότερο πρώτο που τον διαιρεί.
2. Στην επόμενη γραμμή, κάτω από τον δοθέντα αριθμό, γράφουμε το πηλίκο της διαίρεσης.
3. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για τον καινούργιο αριθμό που προέκυψε.
4. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν προκύψει πηλίκο ίσο με 1.
5. Οι αριθμοί δεξιά της κάθετης γραμμής είναι οι ζητούμενοι.

Παράδειγμα

1.500	2
750	2
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$1.500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$

Μέθοδος εύρεσης Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου

calculator.gr

1. Σε μία γραμμή τοποθετούμε τους αριθμούς των οποίων το ΕΚΠ θέλουμε να βρούμε. Ακολουθεί μία κάθετη γραμμή. Στην ίδια γραμμή αλλά δεξιά της κάθετης, γράφουμε τον μικρότερο πρώτο που διαιρεί έναν τουλάχιστον από τους δοθέντες αριθμούς.
2. Στην επόμενη γραμμή, κάτω από κάθε αριθμό, γράφουμε το πηλίκο όσων αριθμών διαιρούνται και τους ιδίους όταν δεν διαιρούνται.
3. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για την καινούργια γραμμή που προέκυψε.
4. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν προκύψει γραμμή αποτελούμενη μόνο από άσσους.
5. Το ΕΚΠ είναι το γινόμενο των πρώτων αριθμών, δεξιά της κάθετης γραμμής.

Παράδειγμα

12	15	18	2
6	15	9	2
3	15	9	3
1	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

ΕΚΠ(12,15,18)

$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$= 180$

α′ Μέθοδος εύρεσης Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη

calculator.gr

1. Σε μία γραμμή τοποθετούμε τους αριθμούς των οποίων το ΜΚΔ θέλουμε να βρούμε. Ακολουθεί μία κάθετη γραμμή. Στην ίδια γραμμή αλλά δεξιά της κάθετης, γράφουμε τον μικρότερο πρώτο που διαιρεί όλους τους δοθέντες αριθμούς.
2. Στην επόμενη γραμμή, κάτω από κάθε αριθμό, γράφουμε το πηλίκο τους.
3. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για την καινούργια γραμμή που προέκυψε.
4. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν προκύψει γραμμή αποτελούμενη από δύο τουλάχιστον, πρώτους μεταξύ τους.
5. Το ΜΚΔ είναι το γινόμενο των πρώτων αριθμών, δεξιά της κάθετης γραμμής.

Παράδειγμα

48	72	108	2
24	36	54	2
12	18	27	3
4	6	9	

ΕΚΠ(48,72,108)

$= 2 \cdot 2 \cdot 3$

$= 12$

β′ Μέθοδος εύρεσης Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη

calculator.gr

1. Σε μία γραμμή τοποθετούμε τους αριθμούς των οποίων το ΜΚΔ θέλουμε να βρούμε.
2. Στην επόμενη γραμμή, κατεβάζουμε τον μικρότερο αριθμό ενώ κάτω από τους άλλους γράφουμε το υπόλοιπο της διαίρεσής τους με αυτόν.
3. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για την καινούργια γραμμή που προέκυψε.
4. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν προκύψει γραμμή αποτελούμενη από μηδενικά σε όλες τις θέσεις πλην αυτής που κατεβάσαμε τον τελευταίο αριθμό.
5. Το ΜΚΔ είναι ο τελευταίος αριθμός που κατεβάσαμε.

<u>Παράδειγμα</u>

48	72	108
48	24	12
0	0	12

ΕΚΠ(48,72,108)= 12

Το κλάσμα

calculator.gr

- Η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται κλάσμα. Η γραμμή λέγεται γραμμή κλάσματος ή κλασματική γραμμή. Ότι υπάρχει πάνω από τη γραμμή λέγεται αριθμητής και ότι υπάρχει κάτω λέγεται παρονομαστής.
- Ο παρονομαστής δηλώνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε την ακέραια μονάδα και ο αριθμητής πόσα από αυτά πήραμε.
- Το κλάσμα παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης με Διαιρετέο τον αριθμητή και διαιρέτη τον παρονομαστή, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$. Το πηλίκο αυτό, λέγεται τιμή του κλάσματος. Ο παρονομαστής πρέπει να είναι διαφορετικός του μηδενός.

Γνήσιο κλάσμα - Καταχρηστικό κλάσμα

calculator.gr

- Γνήσιο λέγεται το κλάσμα που έχει αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή.
- Καταχρηστικό λέγεται το κλάσμα που έχει αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή.

Ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα

calculator.gr

- Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή.
- Ετερώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή.

Μεικτός αριθμός

calculator.gr

Ένας φυσικός αριθμός ακολουθούμενος αμέσως, από ένα γνήσιο κλάσμα, παριστάνουν από κοινού έναν αριθμό που λέγεται μεικτός αριθμός.

μετατροπή μεικτού σε κλάσμα	$\kappa\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\kappa \cdot \mu + \lambda}{\mu}$	μετατροπή κλάσματος σε μεικτό	$\begin{array}{c\|c} \nu & \mu \\ \hline \vdots & \kappa \\ \lambda & \end{array} \Rightarrow \frac{\nu}{\mu} = \kappa\frac{\lambda}{\mu}$

Ο φυσικός λέγεται ακέραιο μέρος του μεικτού και το κλάσμα κλασματικό μέρος του μεικτού.

Σύνθετο κλάσμα - Απλό κλάσμα

calculator.gr

- Σύνθετο λέγεται το κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα.
- Απλό λέγεται το κλάσμα που δεν είναι σύνθετο.

μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$

Απλοποίηση κλάσματος - Ανάγωγο κλάσμα

calculator.gr

- Απλοποίηση ενός κλάσματος λέγεται η διαδικασία εύρεσης ενός κλάσματος ισοδύναμου (δηλαδή ίσου) με το αρχικό αλλά με μικρότερους όρους.
- Επιτυγχάνεται με διαίρεση και των δύο όρων του με τον $MK\Delta$ αυτών.
- Ανάγωγο κλάσμα λέγεται το κλάσμα που δεν απλοποιείται.

διαδικασία απλοποίησης κλάσματος $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha : MK\Delta(\alpha,\beta)}{\beta : MK\Delta(\alpha,\beta)}$

Σύγκριση δύο κλασμάτων

calculator.gr

- Μεταξύ δύο κλασμάτων που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή.
- Μεταξύ δύο κλασμάτων που έχουν τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.
- Αν τα κλάσματα έχουν διαφορετικούς αριθμητές και παρονομαστές τα τρέπουμε σε ομώνυμα και τα συγκρίνουμε σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα κανόνα.

Σύγκριση κλάσματος με τη μονάδα

calculator.gr

- Ένα κλάσμα είναι μικρότερο από τη μονάδα, όταν ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, δηλαδή όταν το κλάσμα είναι γνήσιο.
- Ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα, όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, δηλαδή όταν το κλάσμα είναι καταχρηστικό.
- Ένα κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα, όταν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή.

Αντίστροφοι αριθμοί

calculator.gr

- Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι όταν έχουν γινόμενο ίσο με ένα (1). Δηλαδή α, β αντίστροφοι, όταν $\alpha \cdot \beta = 1$.
- Ο αντίστροφος του αριθμού x, συμβολίζεται $\dfrac{1}{x}$. Άρα, αν $\alpha \cdot \beta = 1$ τότε και αντίστροφα $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$.
- Ο αντίστροφος του αριθμού $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ο αριθμός $\dfrac{\beta}{\alpha}$, $(\alpha, \beta \neq 0)$.
- Το μηδέν (0) δεν έχει αντίστροφο.
- Υπάρχουν μόνο δύο αριθμοί που έχουν αντίστροφο τον εαυτό τους, το 1 και το -1.

Πως προσθέτουμε δύο κλάσματα

calculator.gr

- Για να προσθέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή και προσθέτουμε τους αριθμητές τους, δηλαδή $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$
- Για να προσθέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα, τα τρέπουμε σε ομώνυμα και μετά τα προσθέτουμε σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα.

Πως αφαιρούμε δύο κλάσματα

calculator.gr

- Για να αφαιρέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή και αφαιρούμε τον αριθμητή του αφαιρετέου από τον αριθμητή του μειωτέου, δηλαδή $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$
- Για να αφαιρέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα, τα τρέπουμε σε ομώνυμα και μετά τα αφαιρούμε σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα.

Πως πολλαπλασιάζουμε δύο κλάσματα

calculator.gr

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$

Πως πολλαπλασιάζουμε αριθμό με κλάσμα

calculator.gr

Για να πολλαπλασιάσουμε αριθμό με κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με τον αριθμητή και παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο, δηλαδή $\alpha\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$

Πως διαιρούμε δύο κλάσματα

calculator.gr

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αντιστρέφουμε τον διαιρέτη και κάνουμε πολλαπλασιασμό, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$

Ισοδύναμα (ή ίσα) κλάσματα

calculator.gr

Ισοδύναμα (ή ίσα) κλάσματα λέγονται τα κλάσματα που εκφράζουν το ίδιο μέρος, τμήμα, κομμάτι, ποσότητα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

Ιδιότητες Κλασμάτων

calculator.gr

$\boxed{\frac{\alpha}{1}=\alpha}$	$\boxed{\frac{0}{\alpha}=0}$	$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha}=1}$	$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}}$
$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}}$	$\boxed{-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{-\beta}}$	$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}}$	$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}}$
$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}}$	$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}}$	$\boxed{\alpha\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}}$	$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}}$

$$\boxed{\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \cdots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lambda \Rightarrow \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu} = \lambda}$$

Δεκαδικά κλάσματα

calculator.gr

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται κάθε κλάσμα που έχει παρονομαστή 10, 100, 1000, 10000, κτλ.

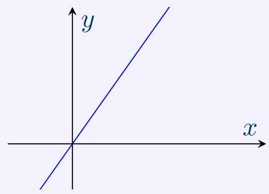
Ανάλογα ποσά

calculator.gr

- Δύο Ποσά x, y λέγονται ανάλογα όταν το πηλίκο τους διατηρείται σταθερό. Δηλαδή $\frac{x}{y} =$ σταθερός αριθμός .

  Με άλλα λόγια, δύο ποσά λέγονται ανάλογα, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν οι τιμές του ενός ποσού πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

- Η γραφική παράσταση δύο ανάλογων ποσών, είναι ένα σύνολο σημείων μιας ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



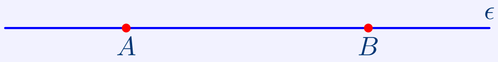
Λόγος - Αναλογία

calculator.gr

- Λόγος του x προς y λέγεται το πηλίκο $\frac{x}{y}$.
- Αναλογία λέγεται η ισότητα δύο λόγων, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

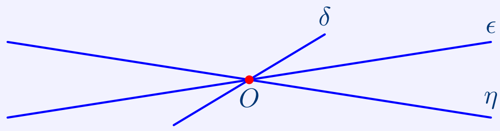
Γεωμετρία

Η ευθεία



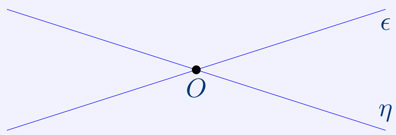
Η ευθεία δεν έχει άκρα.
Διαβάζουμε «ευθεία ϵ» ή «ευθεία AB».

Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται ακριβώς μια ευθεία.

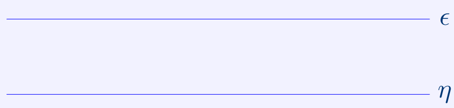


Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

Τεμνόμενες ευθείες - Παράλληλες ευθείες



Αν δύο ευθείες έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, λέμε ότι τέμνονται στο σημείο αυτό.



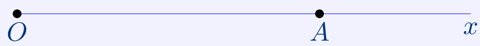
Δύο ευθείες λέγονται παράλληλες, όταν είναι συνεπίπεδες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Γράφουμε $\epsilon // \eta$.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο

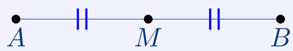
Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο είναι: ή θα συμπίπτουν ή θα τέμνονται ή θα είναι παράλληλες.

Η ημιευθεία

Η ημιευθεία έχει ένα άκρο. Το άκρο λέγεται αρχή της ημιευθείας. Διαβάζουμε «ημιευθεία Ox» ή «ημιευθεία OA».



Το ευθύγραμμο τμήμα

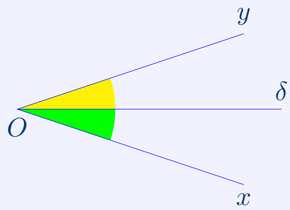


- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει δύο άκρα. Διαβάζουμε «ευθύγραμμο τμήμα AB».
- Απόσταση δύο σημείων A, B ονομάζεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.
- Μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB λέγεται το σημείο του M για το οποίο $MA = MB$.

Διχοτόμος Γωνίας

calculator.gr

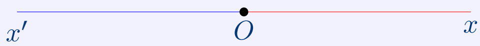
Διχοτόμος μίας γωνίας $x\widehat{O}y$ ονομάζεται η ημιευθεία $O\delta$ που έχει αρχή την κορυφή O της γωνίας, βρίσκεται στο εσωτερικό της και χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες $\delta\widehat{O}x$ και $\delta\widehat{O}y$.



Αντικείμενες ημιευθείες

calculator.gr

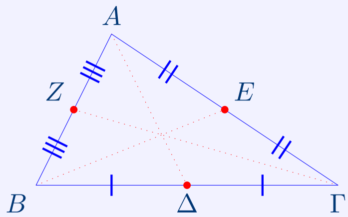
Δύο ημιευθείες λέγονται αντικείμενες ημιευθείες όταν ανήκουν στην ίδια ευθεία, έχουν κοινή αρχή και κανένα άλλο κοινό σημείο.



Διάμεσος τριγώνου

calculator.gr

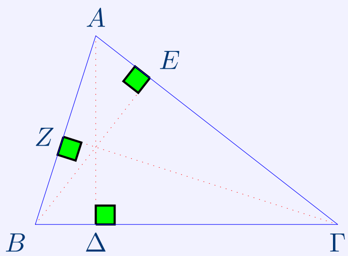
- Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (βαρύκεντρο).

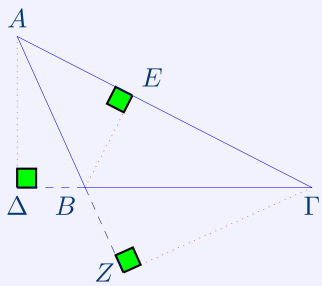


Ύψος τριγώνου

calculator.gr

- Ύψος ενός τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.
- Τα τρία ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (ορθόκεντρο).

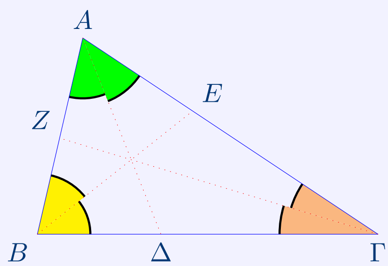




Διχοτόμος γωνίας τριγώνου

calculator.gr

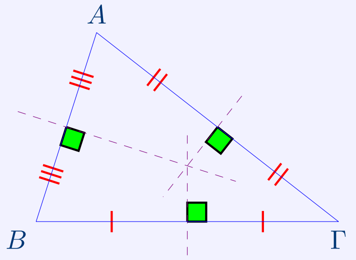
- Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.
- Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (έκκεντρο).



Μεσοκάθετες πλευρών τριγώνου

calculator.gr

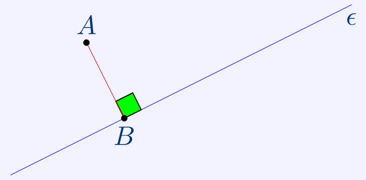
Οι τρεις μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (περίκεντρο).



Απόσταση σημείου από ευθεία

calculator.gr

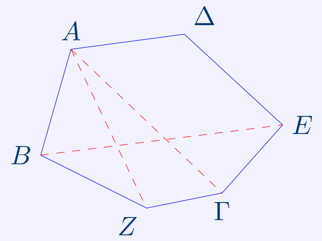
Απόσταση ενός σημείου από μία ευθεία λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από το σημείο προς την ευθεία.



Διαγώνιος πολυγώνου

calculator.gr

Διαγώνιος ενός πολυγώνου λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο μη διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου.



Κλίμακα ενός χάρτη

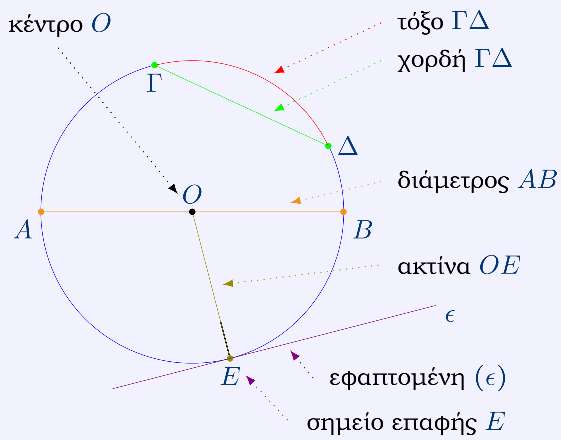
calculator.gr

Κλίμακα ενός χάρτη λέγεται ο λόγος της απόστασης δύο σημείων στο χάρτη προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων (προϋπόθεση, οι αποστάσεις να είναι μετρημένες με την ίδια μονάδα μέτρησης).

Κύκλος

calculator.gr

- Κύκλος με κέντρο το σημείο O του επιπέδου και ακτίνα $\rho > 0$ λέγεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν απ' το σταθερό σημείο O απόσταση ίση με ρ. Συμβολίζεται κυκλ(O, ρ).
- Τόξο ενός κύκλου λέγεται το μέρος του κύκλου που περιέχεται μεταξύ δύο σημείων του.
- Χορδή ενός κύκλου λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημαία του κύκλου.
- Διάμετρος ενός κύκλου λέγεται κάθε χορδή του που περνά από το κέντρο του κύκλου.



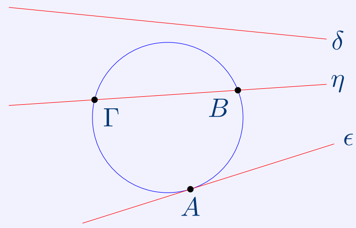
- Μία ευθεία λέγεται εφαπτομένη σ' ένα κύκλο στο σημείο E όταν ευθεία και κύκλος έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, το E. Το σημείο E λέγεται σημείο επαφής. Η ακτίνα OE είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο E.

- Κυκλικός δίσκος με κέντρο O και ακτίνα $\rho > 0$ λέγεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν απ' το σταθερό σημείο O απόσταση μικρότερη ή ίση με ρ.

Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

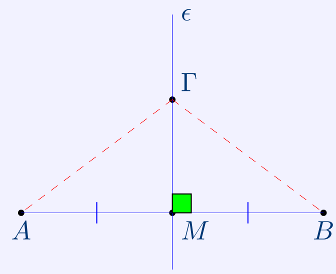
Μία ευθεία κι ένας κύκλος μπορεί να έχουν ένα, δύο ή κανένα κοινό σημείο.

Αν έχουν ένα κοινό σημείο, λέμε ότι η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο επαφής, αν έχουν δύο λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο.



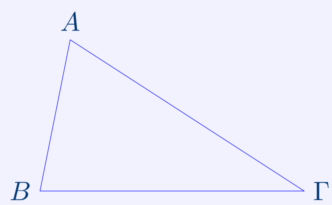
Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος - Ιδιότητα της Μεσοκαθέτου

- Ορισμός: Μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη σε αυτό και διέρχεται απ' το μέσον του.
- Ιδιότητα της Μεσοκαθέτου: Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος αν και μόνο αν ισαπέχει απ' τα άκρα του. Δηλαδή:
  αν Γ σημείο της μεσοκαθέτου ϵ, τότε $\Gamma A = \Gamma B$ και αντίστροφα,
  αν $\Gamma A = \Gamma B$, τότε Γ σημείο της μεσοκαθέτου ϵ.



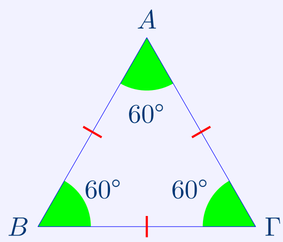
Σκαληνό τρίγωνο

Σκαληνό τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του άνισες.



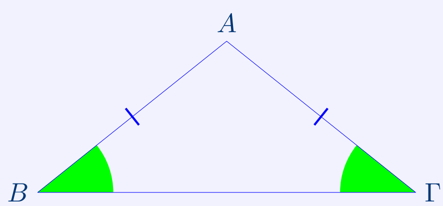
Ισόπλευρο τρίγωνο

- Ισόπλευρο τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες, 60° η καθεμία.



Ισοσκελές τρίγωνο

- Ισοσκελές τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.
- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
  Δηλαδή, αν $AB = A\Gamma$ τότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

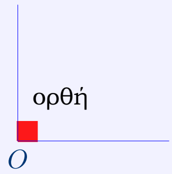


Σχέση γωνιών και πλευρών τριγώνου

- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντιστρόφως.
- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες και αντιστρόφως.

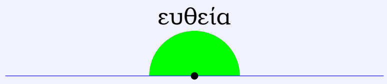
Η ορθή γωνία

Μια γωνία λέγεται ορθή όταν έχει μέτρο $90°$.



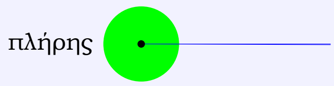
Η Ευθεία γωνία

Ευθεία γωνία λέγεται η γωνία που σχηματίζουν δύο αντικείμενες ημιευθείες.
Η ευθεία γωνία έχει μέτρο $180°$.



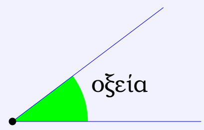
Η Πλήρης γωνία

Μια γωνία λέγεται πλήρης όταν έχει μέτρο $360°$.



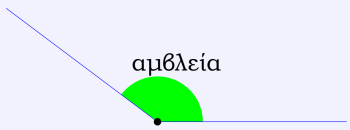
Οξεία γωνία

Οξεία γωνία λέγεται κάθε γωνία μικρότερη απ' την ορθή, δηλαδή μικρότερη από $90°$.



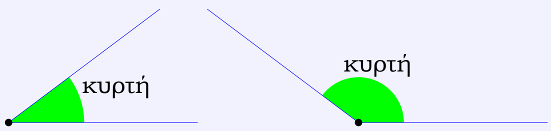
Αμβλεία γωνία

Αμβλεία γωνία λέγεται κάθε γωνία μεγαλύτερη από την ορθή και μικρότερη από την ευθεία, δηλαδή έχει μέτρο μεταξύ $90°$ και $180°$.



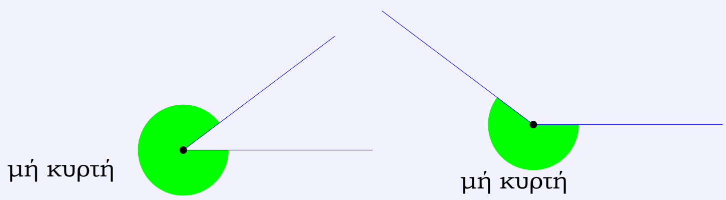
Κυρτή γωνία

Κυρτή γωνία λέγεται κάθε γωνία μικρότερη από $180°$.



Μη κυρτή γωνία

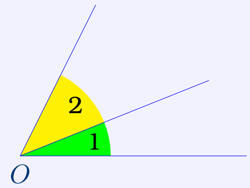
Μη κυρτή γωνία λέγεται κάθε γωνία μεγαλύτερη από $180°$ και μικρότερη από $360°$.



Εφεξής γωνίες

calculator.gr

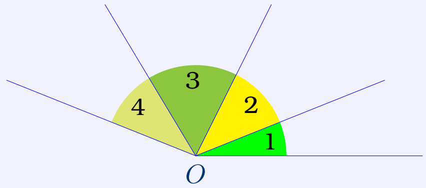
Δύο γωνίες λέγονται εφεξής, όταν έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο.



Διαδοχικές γωνίες

calculator.gr

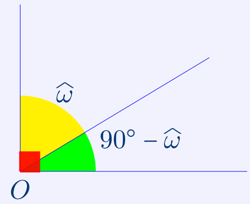
Τρεις ή περισσότερες γωνίες λέγονται διαδοχικές όταν είναι συνεπίπεδες και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενή της.



Συμπληρωματικές γωνίες

calculator.gr

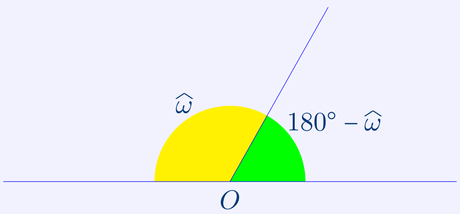
- Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα $90°$.
- Η συμπληρωματική μιας γωνίας $\widehat{\omega}$ είναι $90° - \widehat{\omega}$.



Παραπληρωματικές γωνίες

calculator.gr

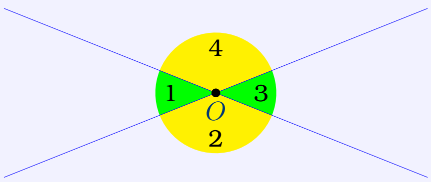
- Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα $180°$.
- Η παραπληρωματική μιας γωνίας $\widehat{\omega}$ είναι $180° - \widehat{\omega}$.



Κατακορυφήν γωνίες

calculator.gr

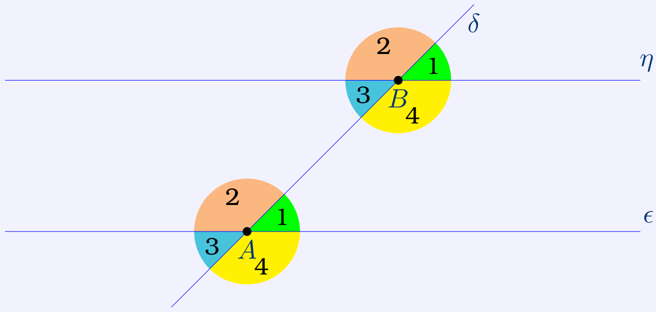
- Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν όταν οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.
- Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. Δηλαδή $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$ και $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4$



Εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες

Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ε,η που τέμνονται από τη δ, είναι ίσες.

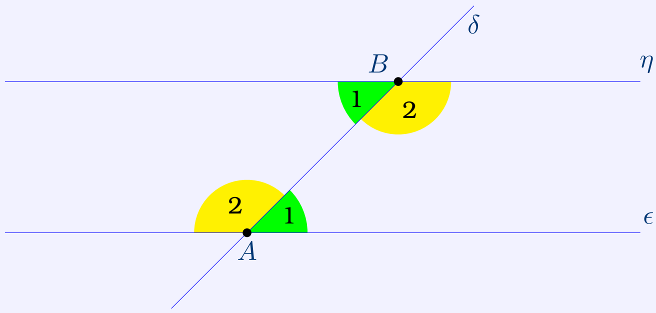
Άρα, αν $\epsilon // \eta$ τότε: $\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 \\ \widehat{B}_3 = \widehat{A}_3 \\ \widehat{B}_4 = \widehat{A}_4 \end{cases}$



Εντός, εναλλάξ γωνίες

Οι εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ε,η που τέμνονται από τη δ, είναι ίσες.

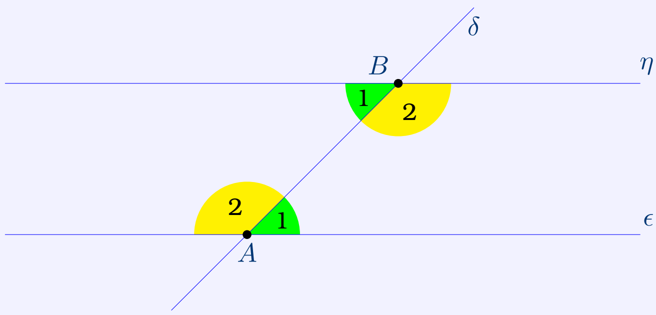
Άρα, αν $\epsilon // \eta$ τότε: $\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 \end{cases}$



Εντός και επί τα αυτά γωνίες

Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ε,η που τέμνονται από τη δ, είναι παραπληρωματικές.

Άρα, αν $\epsilon // \eta$ τότε: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = 180°$ και $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 = 180°$

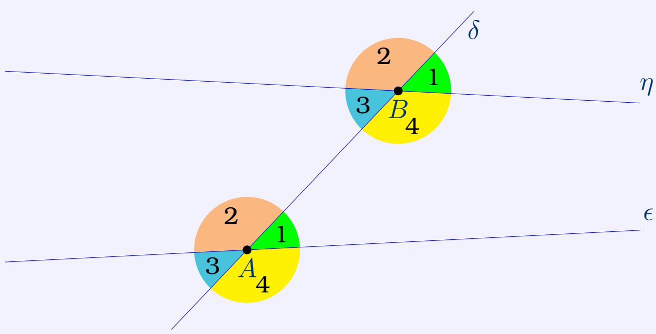


Συνθήκες παραλληλίας ευθειών

Αν δύο ευθείες ε,η τέμνονται από τρίτη ευθεία δ και ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

- Δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες
- Δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
- Δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές

Τότε οι ευθείες ε, η είναι παράλληλες.

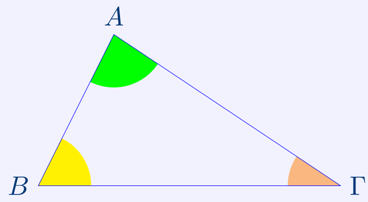


Άθροισμα γωνιών τριγώνου

calculator.gr

Το άθροισμα γωνιών τριγώνου ισούται με $180°$.

Δηλαδή $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$

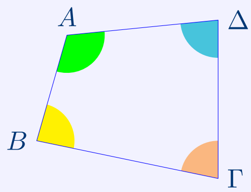


Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου

calculator.gr

Το άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου είναι $360°$.

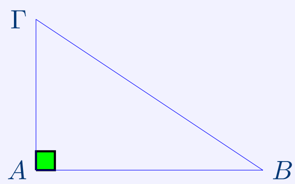
Δηλαδή $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360°$



Ορθογώνιο τρίγωνο

calculator.gr

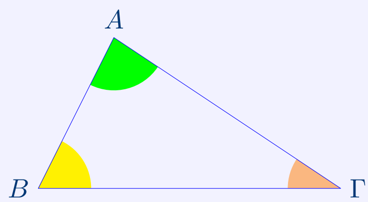
Ορθογώνιο τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει μία ορθή γωνία



Οξυγώνιο τρίγωνο

calculator.gr

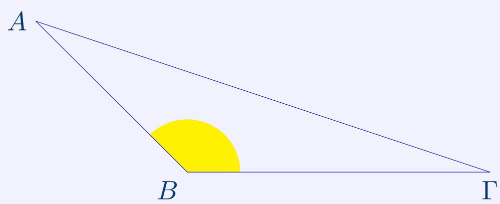
Οξυγώνιο τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες.



Αμβλυγώνιο τρίγωνο

calculator.gr

Αμβλυγώνιο τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει μία αμβλεία γωνία.



Είδη τριγώνων με κριτήριο τις πλευρές τους

calculator.gr

Τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές τους είναι:

- Ισόπλευρο τρίγωνο (έχει όλες τις πλευρές του ίσες)
- Ισοσκελές τρίγωνο (έχει δύο πλευρές ίσες)
- Σκαληνό τρίγωνο (έχει όλες τις πλευρές του άνισες)

Είδη τριγώνων με κριτήριο τις γωνίες τους

calculator.gr

Τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες τους είναι:

- Ορθογώνιο τρίγωνο (έχει μία γωνία ορθή)
- Οξυγώνιο τρίγωνο (έχει όλες τις γωνίες του οξείες)
- Αμβλυγώνιο τρίγωνο (έχει μία αμβλεία γωνία)

Είδη γωνιών

calculator.gr

- Ορθή γωνία $(90°)$
- Οξεία γωνία (μικρότερη από $90°$)
- Αμβλεία γωνία (μεγαλύτερη από $90°$ και μικρότερη από $180°$)
- Κυρτή γωνία (μικρότερη από $180°$)
- Μη κυρτή γωνία (μεγαλύτερη από $180°$ και μικρότερη από $360°$)

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις γωνιών

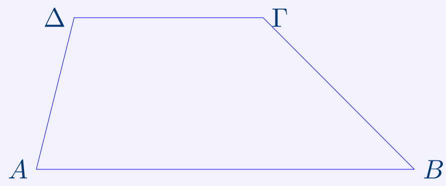
calculator.gr

- Μηδενική γωνία $(0°)$
- Ορθή γωνία $(90°)$
- Ευθεία γωνία $(180°)$
- Πλήρης γωνία $(360°)$

Τραπέζιο

calculator.gr

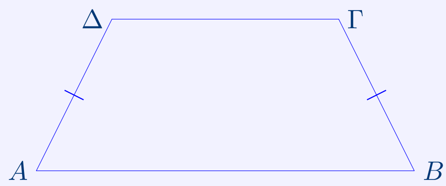
Τραπέζιο λέγεται το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Ισοσκελές τραπέζιο

calculator.gr

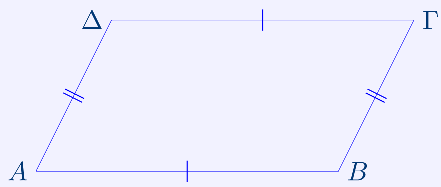
- Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.
- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.



Παραλληλόγραμμο

calculator.gr

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.



Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:

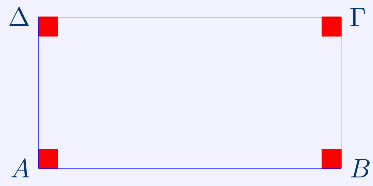
- Απέναντι πλευρές παράλληλες

- Απέναντι πλευρές ίσες
- Απέναντι γωνίες ίσες
- Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται

Ορθογώνιο

calculator.gr

Ορθογώνιο λέγεται το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

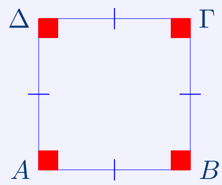


Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:

- έχει μία γωνία ορθή
- οι διαγώνιές του είναι ίσες

Τετράγωνο

calculator.gr

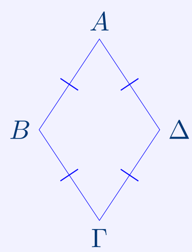


- Τετράγωνο λέγεται το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές.
- Το ορθογώνιο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι τετράγωνο.

Ρόμβος

calculator.gr

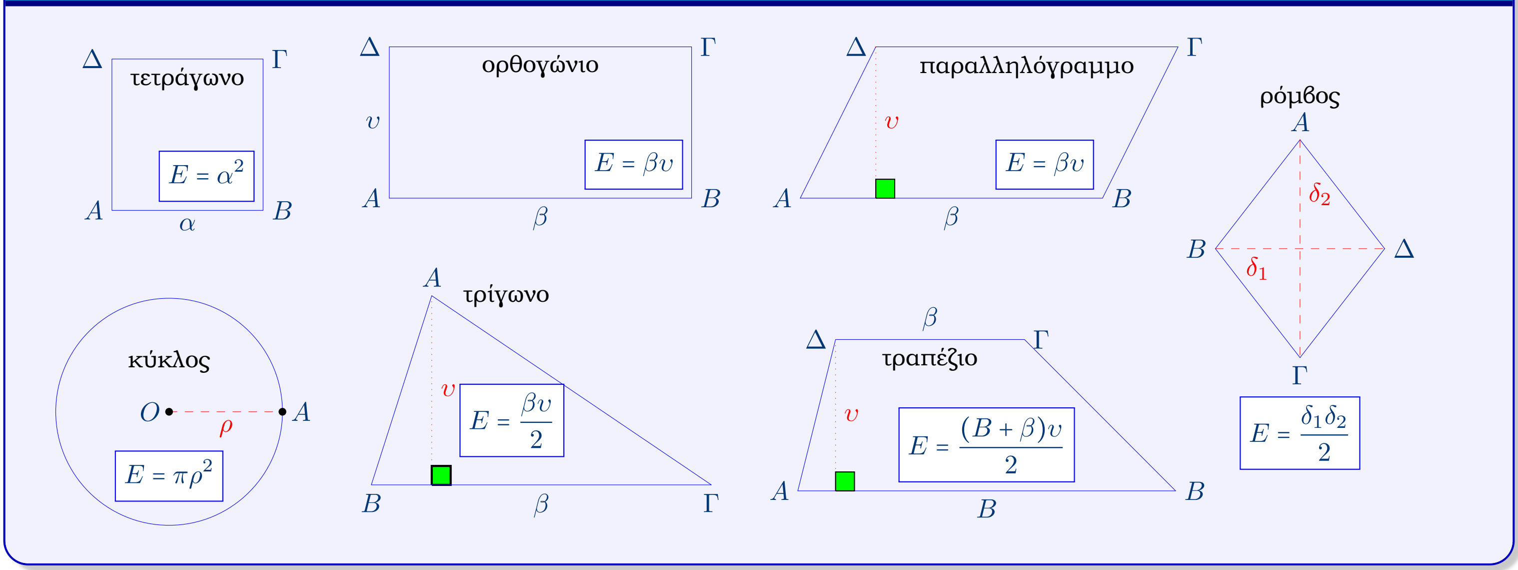
Ρόμβος λέγεται το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:

- οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα.
- έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Εμβαδά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων



Αποδείξεις

Αποδείξτε ότι δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες

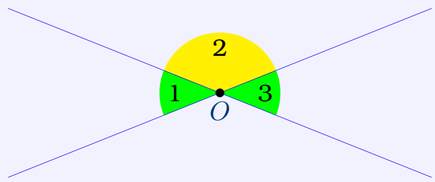
calculator.gr

Θα αποδείξουμε $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$

$\widehat{O}_1 = 180° - \widehat{O}_2$ (αφού $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2$ παραπληρωματικές)

$\widehat{O}_3 = 180° - \widehat{O}_2$ (αφού $\widehat{O}_3, \widehat{O}_2$ παραπληρωματικές)

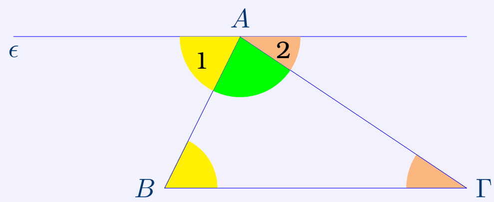
Άρα $\boxed{\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3}$



Αποδείξτε ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου ισούται με $180°$

calculator.gr

Φέρνουμε την ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στη $B\Gamma$



Θα αποδείξουμε ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$

$\widehat{B} = \widehat{A}_1$ (ως εντός, εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$, ϵ που τέμνονται από την AB)

$\widehat{\Gamma} = \widehat{A}_2$ (ως εντός, εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$, ϵ που τέμνονται από την $A\Gamma$)

Επομένως $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \widehat{A} + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$

Όμως $\widehat{A} + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180°$

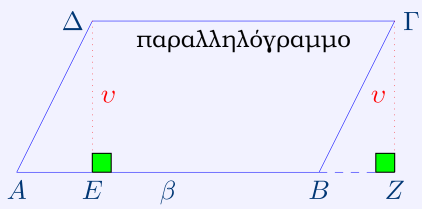
Άρα $\boxed{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°}$

Αποδείξτε τον τύπο εμβαδού παραλληλογράμμου $E = \beta\upsilon$

calculator.gr

Φέρνουμε τα ύψη ΔE και ΓZ

$$
\begin{aligned}
E_{\text{παραλ}} &= (\Delta A E) + (\Delta E B \Gamma) \\
&= (\Delta E B \Gamma) + (\Gamma B Z) \quad [\text{ αφού } (\Delta A E) = (\Gamma B Z)] \\
&= (\Delta E Z \Gamma) \\
&= EZ \cdot \upsilon \quad (\text{ αφού } \Delta E Z \Gamma \text{ ορθογώνιο }) \\
&= \Delta\Gamma \cdot \upsilon \quad [EZ = \Delta\Gamma \text{ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου }] \\
&= AB \cdot \upsilon \quad [AB = \Delta\Gamma \text{ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου }]
\end{aligned}
$$

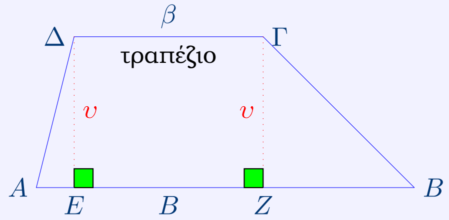


Άρα $\boxed{E_{\text{παραλ}} = \beta\upsilon}$

Αποδείξτε τον τύπο εμβαδού τραπεζίου $E = \dfrac{(B+\beta)\upsilon}{2}$

calculator.gr

Φέρνουμε τα ύψη ΔE και ΓZ



$$
\begin{aligned}
E_{\text{τραπ}} &= (\Delta AE) + (\Delta EZ\Gamma) + (\Gamma ZB) = \frac{AE\cdot\upsilon}{2} + EZ\cdot\upsilon + \frac{ZB\cdot\upsilon}{2}\\
&= \frac{AE\cdot\upsilon}{2} + \frac{2\cdot EZ\cdot\upsilon}{2} + \frac{ZB\cdot\upsilon}{2} = \frac{AE\cdot\upsilon + 2\cdot EZ\cdot\upsilon + ZB\cdot\upsilon}{2}\\
&= \frac{(AE + 2\cdot EZ + ZB)\cdot\upsilon}{2} = \frac{(AE + EZ + EZ + ZB)\cdot\upsilon}{2}\\
&= \frac{(AE + EZ + \Delta\Gamma + ZB)\cdot\upsilon}{2} \quad (\text{ αφού } EZ = \Delta\Gamma)\\
&= \frac{(AB + \Delta\Gamma)\cdot\upsilon}{2} \quad (\text{ αφού } AE + EZ + ZB = AB)
\end{aligned}
$$

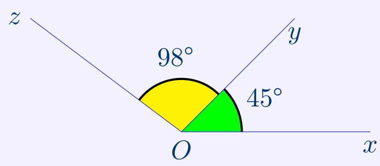
Άρα $\boxed{E_{\text{τραπ}} = \dfrac{(B+\beta)\upsilon}{2}}$

Ασκήσεις Γεωμετρίας

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

calculator.gr

1. Βρείτε την κυρτή γωνία $x\widehat{O}z$.



Λύση

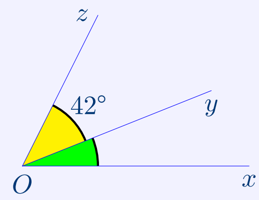
$x\widehat{O}z = x\widehat{O}y + y\widehat{O}z$

$= 45° + 98°$

$= 143°$

άρα $\boxed{x\widehat{O}z = 143°}$

2. Αν η κυρτή γωνία $x\widehat{O}z = 64°$, βρείτε τη γωνία $x\widehat{O}y$.



Λύση

$x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = x\widehat{O}z$

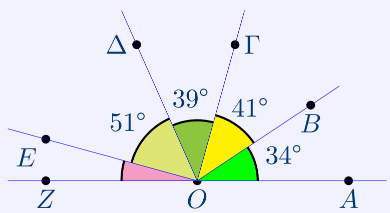
$x\widehat{O}y = x\widehat{O}z - y\widehat{O}z$

$= 64° - 42°$

$= 22°$

άρα $\boxed{x\widehat{O}y = 22°}$

3. Αν $A\widehat{O}Z$ είναι ευθεία γωνία, βρείτε τη γωνία $E\widehat{O}Z$.



Λύση

$A\widehat{O}B + B\widehat{O}\Gamma + \Gamma\widehat{O}\Delta + \Delta\widehat{O}E + E\widehat{O}Z = A\widehat{O}Z$

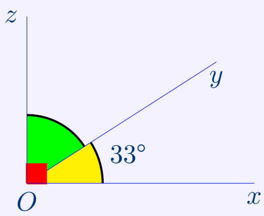
$E\widehat{O}Z = A\widehat{O}Z - A\widehat{O}B - B\widehat{O}\Gamma - \Gamma\widehat{O}\Delta - \Delta\widehat{O}E$

$= 180° - 34° - 41° - 39° - 51°$

$= 15°$

άρα $\boxed{E\widehat{O}Z = 15°}$

4. Βρείτε τη γωνία $y\widehat{O}z$.



Λύση

$x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = 90°$ (ως συμπληρωματικές)

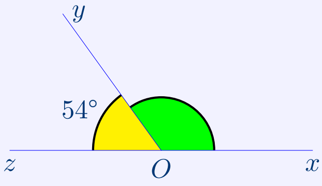
$y\widehat{O}z = 90° - x\widehat{O}y$

$= 90° - 33°$

$= 57°$

άρα $\boxed{y\widehat{O}z = 57°}$

5. Αν η γωνία $x\widehat{O}z$ είναι ευθεία, βρείτε τη γωνία $x\widehat{O}y$.



Λύση

$x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = 180°$ (ως παραπληρωματικές)

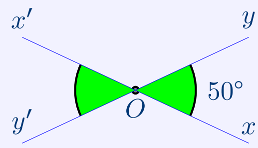
$x\widehat{O}y = 180° - y\widehat{O}z$

$= 180° - 54°$

$= 126°$

άρα $\boxed{y\widehat{O}z = 126°}$

6. Βρείτε τη γωνία $x'\widehat{O}y'$.

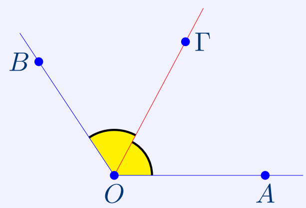


Λύση

$x'\widehat{O}y' = x\widehat{O}y$ (ως κατακορυφήν)

άρα $\boxed{x'\widehat{O}y' = 50°}$

7. Αν $O\Gamma$ διχοτόμος της κυρτής γωνίας $A\widehat{O}B = 124°$, βρείτε τη γωνία $A\widehat{O}\Gamma$.

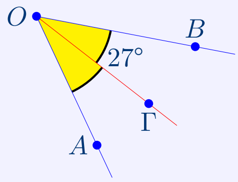


Λύση

$A\widehat{O}\Gamma = \dfrac{A\widehat{O}B}{2} = \dfrac{124°}{2} = 62°$ (αφού $O\Gamma$ διχοτόμος της $A\widehat{O}B$)

άρα $\boxed{A\widehat{O}\Gamma = 62°}$

8. Αν $O\Gamma$ διχοτόμος της κυρτής γωνίας $A\widehat{O}B$ και $\Gamma\widehat{O}B = 27°$ βρείτε τη γωνία $A\widehat{O}B$.

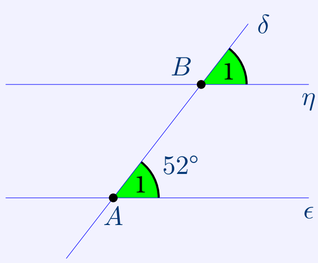


Λύση

$A\widehat{O}B = 2 \cdot A\widehat{O}\Gamma = 2 \cdot 27°$ (αφού $O\Gamma$ διχοτόμος της $A\widehat{O}B$)

άρα $\boxed{A\widehat{O}B = 54°}$

9. Αν $\epsilon // \eta$, βρείτε τη γωνία $\widehat{B}_1$.

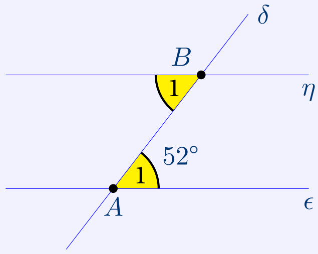


Λύση

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ $\left(\begin{array}{l}\text{ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων} \\ \epsilon, \eta, \text{ που τέμνονται από τη } \delta\end{array}\right)$

άρα $\boxed{\widehat{B}_1 = 52°}$

10. Αν $\epsilon // \eta$, βρείτε τη γωνία $\widehat{B}_1$.

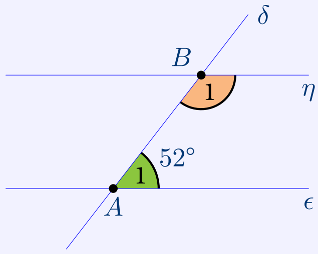


Λύση

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ $\left(\begin{array}{l}\text{ως εντός, εναλλάξ των παραλλήλων} \\ \epsilon, \eta, \text{ που τέμνονται από τη } \delta\end{array}\right)$

άρα $\boxed{\widehat{B}_1 = 52°}$

11. Αν $\epsilon // \eta$, βρείτε τη γωνία $\widehat{B}_1$.



Λύση

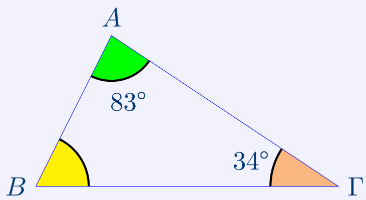
$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180°$ $\left(\begin{array}{l}\text{ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων} \\ \epsilon, \eta, \text{ που τέμνονται από τη } \delta\end{array}\right)$

$\widehat{B}_1 = 180° - \widehat{A}_1$

$\widehat{B}_1 = 180° - 52°$

άρα $\boxed{\widehat{B}_1 = 128°}$

12. Βρείτε τη γωνία $\widehat{B}$.



Λύση

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου $180°$)

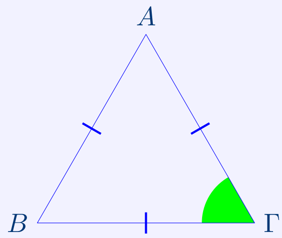
$\widehat{B} = 180° - \widehat{A} - \widehat{\Gamma}$

$= 180° - 83° - 34°$

$= 63°$

άρα $\boxed{\widehat{B} = 63°}$

13. Βρείτε τη γωνία $\widehat{B}$.

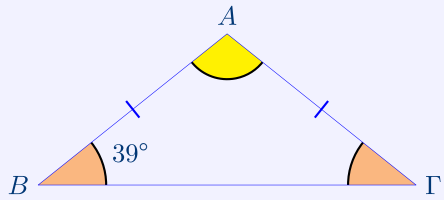


Λύση

$\widehat{\Gamma} = 60°$ (γωνία ισόπλευρου τριγώνου)

άρα $\boxed{\widehat{\Gamma} = 60°}$

14. Βρείτε τη γωνία $\widehat{A}$.



Λύση

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου 180°)

$\widehat{A}=180°-\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$

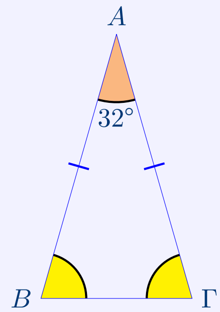
$=180°-\widehat{B}-\widehat{B}$ $\left(\begin{array}{c}\widehat{\Gamma}=\widehat{B} \text{ ως προσκείμενες γωνίες} \\ \text{στη βάση ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$

$=180°-39°-39°$

$=102°$

άρα $\boxed{\widehat{A}=102°}$

15. Βρείτε τις γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$.



Λύση

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου 180°)

$\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180°-\widehat{A}$

$=180°-32°$

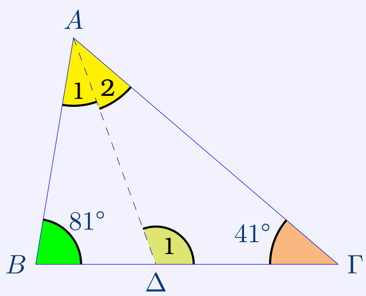
$=148°$

άρα $\boxed{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=148°}$

$\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}{2}=\dfrac{148°}{2}=74°$ $\left(\begin{array}{c}\widehat{B}=\widehat{\Gamma} \text{ ως προσκείμενες γωνίες} \\ \text{στη βάση ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$

άρα $\boxed{\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=74°}$

16. Αν $A\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, βρείτε τη γωνία $\widehat{\Delta}_1$.



Λύση

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου 180°)

$\widehat{A}=180°-\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$

$=180°-81°-41°$

$=58°$

άρα $\boxed{\widehat{A}=58°}$

$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2=\dfrac{\widehat{A}}{2}=\dfrac{58°}{2}=29°$ ($\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος της $\widehat{A}$)

άρα $\boxed{\widehat{A}_2=29°}$

$\widehat{A}_2+\widehat{\Delta}_1+\widehat{\Gamma}=180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου 180°)

$\widehat{\Delta}_1=180°-\widehat{A}_2-\widehat{\Gamma}$

$=180°-29°-41°$

$=110°$

άρα $\boxed{\widehat{\Delta}_1=110°}$